宁波市 2014 年高考模拟试卷

数学（理科）参考答案

说明：

一、本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容制订相应的评分细则．

二、对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后续部分的解答未改变该题的内容与难度，可视影响的程度决定后续部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后续部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

三、解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

四、只给整数分数．选择题和填空题不给中间分．

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算。每小题 5 分，满分 50 分．

1．C　2．D　3．A　4．C　5． B

6．A　7．B　8．D　9．D　10．B

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算．每小题 4 分，满分 28 分．

11．2　12．[21，31]　13．$5x+3y+1=0$　14．$\dfrac{7}{3}$

15．27π　16．$\dfrac{3}{5}$　17．$\dfrac{2}{3}$

三、解答题：本大题共 5 小题，共 72 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

18．（本题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由 $\cos B=\dfrac{11}{14}$，得 $\sin B=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$，　……………………1 分

又 $2\sqrt{3}a\sin B=5c$，代入得 $3a=7c$，

由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，得 $3\sin A=7\sin C$，　……………………3 分

$3\sin A=7\sin(A+B)$，　$3\sin A=7\sin A\cos B+7\cos A\sin B$　………5 分

得 $\tan A=-\sqrt{3}$，　$A=\dfrac{2\pi}{3}$　……………………7 分

（Ⅱ）$AB^2+BD^2-2AB\bullet BD\cos B=\dfrac{19}{4}$，　……………………9 分

$c^2+(\dfrac{7}{6}c)^2-2c\bullet\dfrac{7}{6}c\bullet\dfrac{11}{14}=\dfrac{19}{4}$，　$c=3$，则 $a=7$　……………………11 分

$S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\bullet3\bullet7\dfrac{5\sqrt{3}}{14}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$　……………………14 分

（19）（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由题意，$\begin{cases} a_1+d=8 \\ 4a_1+6d=40 \end{cases}$，得$\begin{cases} a_1=4 \\ d=4 \end{cases}$，$\therefore a_n=4n$． …………3 分

$\because T_n-2b_n+3=0$，$\therefore$当$n=1$时，$b_1=3$，

当$n\geq 2$时，$T_{n-1}-2b_{n-1}+3=0$，两式相减，得$b_n=2b_{n-1},(n\geq 2)$

数列$\{b_n\}$为等比数列，$\therefore b_n=3\cdot 2^{n-1}$． …………7 分

（Ⅱ）$c_n=\begin{cases} 4n & n\text{为奇数} \\ 3\cdot 2^{n-1} & n\text{为偶数} \end{cases}$．

当 n 为偶数时，

$$P_n=(a_1+a_3+\cdots+a_{n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_n)$$

$$=\frac{(4+4n-4)\cdot\frac{n}{2}}{2}+\frac{6(1-4^{\frac{n}{2}})}{1-4}=2^{n+1}+n^2-2．$$ ……………10 分

当 n 为奇数时，

（法一）$n-1$为偶数，$P_n=P_{n-1}+c_n=2^{(n-1)+1}+(n-1)^2-2+4n=2^n+n^2+2n-1$

……………13 分

（法二）$P_n=(a_1+a_3+\cdots+a_{n-2}+a_n)+(b_2+b_4+\cdots+b_{n-1})$

$$=\frac{(4+4n)\cdot\frac{n+1}{2}}{2}+\frac{6(1-4^{\frac{n-1}{2}})}{1-4}=2^n+n^2+2n-1．$$ ……………13 分

$$\therefore P_n=\begin{cases} 2^{n+1}+n^2-2, n\text{为偶数} \\ 2^n+n^2+2n-1，n\text{为奇数} \end{cases}$$ ……………14 分

20．（本题满分 15 分）

解：（Ⅰ）证明：因为 M 为等边$\triangle ABC$ 的 AC 边的中点，所以 $BM\perp AC$.

依题意 $CD\perp AC$，且 A、B、C、D 四点共面，所以 $BM/\!/CD$. …………3 分

又因为 $BM\not\subset$平面 PCD，$CD\subset$平面 PCD，所以 $BM/\!/$平面 PCD. …………5 分

（Ⅱ）因为 $CD\perp AC$，$CD\perp PA$，

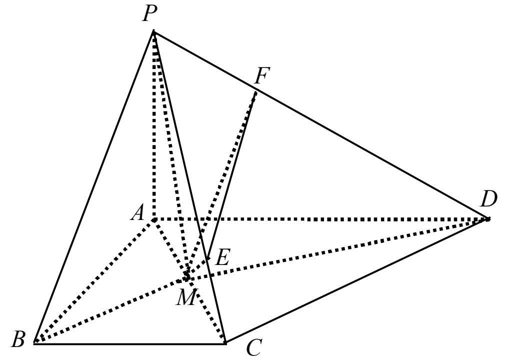
所以 $CD\perp$ 平面 PAC，故 PD 与平面 PAC 所成的角即为 $\angle CPD$.

……………7 分

不妨设 $PA=AB=1$，则 $PC=\sqrt{2}$.

由于 $\tan\angle CPD=\dfrac{CD}{PC}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

所以 $CD=\sqrt{3}$. ……………9 分



（第 20 题图）

（方法一）

在等腰 Rt△PAC 中，过点 M 作 $ME\perp PC$ 于点 E，再在 Rt△PCD 中作 $EF\perp PD$ 于点 F．因为 $ME\perp PC$，$ME\perp CD$，所以 $ME\perp$ 平面 PCD，可得 $ME\perp PD$.

又 $EF\perp PD$，所以 $\angle EFM$ 即为二面角 C-PD-M 的平面角． ……………12 分

易知 $PE=3EC$，$ME=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$EF=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{30}}{20}$，

所以 $\tan\angle EFM=\dfrac{ME}{EF}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{3\sqrt{30}}{20}}=\dfrac{\sqrt{15}}{9}$，

即二面角 C-PD-M 的正切值是 $\dfrac{\sqrt{15}}{9}$.

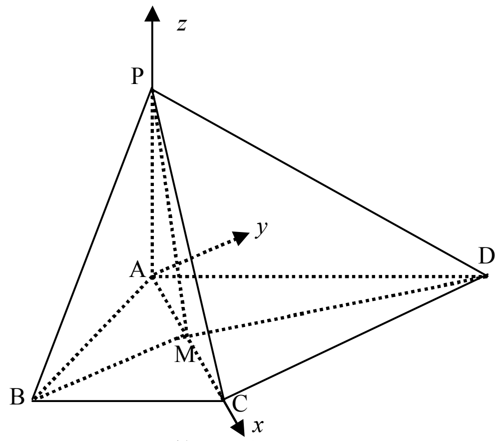
……………15 分

（方法二）

以 A 点为坐标原点，AC 为 x 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$.

则 P（0,0,1），

M（$\dfrac{1}{2}$,0,0），C（1,0,0），$D(1,\sqrt{3},0)$.



（第 20 题图）

则 $\overrightarrow{PC}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{PD}=(1,\sqrt{3},-1)$，$\overrightarrow{PM}=(\dfrac{1}{2},0,-1)$.

若设 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$ 和 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$ 分别是平面 PCD 和平面 PMD 的法向量，则

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1-z_1=0\\ x_1+\sqrt{3}y_1-z_1=0\end{cases}$$，可取 $\overrightarrow{n_1}=(1,0,1)$.

由$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{PM}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}x_2-z_2=0\\ x_2+\sqrt{3}y_2-z_2=0\end{cases}$，可取$\overrightarrow{n_2}=(2,-\frac{\sqrt{3}}{3},1)$. ………12 分

所以$\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}}}=\sqrt{\frac{27}{32}}$,

故二面角 C−PD−M 的余弦值是$\sqrt{\frac{27}{32}}$，其正切值是$\frac{\sqrt{15}}{9}$. ……………15 分

21.（本题满分 15 分）

解：(Ⅰ) 设右焦点$F(c,0)$（其中$c=\sqrt{a^2-b^2}$），

依题意$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$a+c=3$，所以$a=2,c=1$. ……………3 分

所以$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，故椭圆 Γ 的方程是$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………5 分

(Ⅱ) 由（Ⅰ）知，F（1,0）. 将通过焦点 F 的直线方程$y=k(x-1)$代入椭圆 Γ 的方程

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，可得$(3+4k^2)x^2-8k^2x+(4k^2-12)=0$，

其判别式$\Delta=(8k^2)^2-16(k^2-3)(3+4k^2)=144(k^2+1)$.

特别地，对于直线l_1，若设$A(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，则

$$|AC|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{1+k_1^2}\,|x_1-x_2|$$

$$=\sqrt{1+k_1^2}\cdot\frac{\sqrt{144(k_1^2+1)}}{3+4k_1^2}\ ,\quad k_1\in R且k_1\neq 0.$$ ………………10 分

又设$B(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$，由于 B、D 位于直线l_1的异侧，

所以$k_1(x_3-1)-y_3$与$k_1(x_4-1)-y_4$异号. 因此 B、D 到直线l_1的距离之和

$$d=\frac{|k_1(x_3-1)-y_3|}{\sqrt{1+k_1^2}}+\frac{|k_1(x_4-1)-y_4|}{\sqrt{1+k_1^2}}=\frac{|[k_1(x_3-1)-y_3]-[k_1(x_4-1)-y_4]|}{\sqrt{1+k_1^2}}$$

$$=\frac{|k_1(x_3-x_4)-(y_3-y_4)|}{\sqrt{1+k_1^2}}=\frac{|k_1-k_2|}{\sqrt{1+k_1^2}}\cdot|x_3-x_4|=\frac{|k_1-k_2|}{\sqrt{1+k_1^2}}\cdot\frac{\sqrt{144(k_2^2+1)}}{3+4k_2^2}.$$

………12 分

综合可得，四边形 $ABCD$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|AC|\cdot d=\frac{72\sqrt{(k_1^2+1)(k_2^2+1)(k_1-k_2)^2}}{(3+4k_1^2)(3+4k_2^2)}$.

因为 $k_1k_2=-\frac{3}{4}$，所以 $t=k_1^2+k_2^2\ge 2|k_1k_2|=\frac{3}{2}$，于是

$$S=f(t)=\frac{72\sqrt{(t+\frac{25}{16})(t+\frac{3}{2})}}{18+12t}=6\sqrt{\frac{t+\frac{25}{16}}{t+\frac{3}{2}}}=6\sqrt{1+\frac{\frac{1}{16}}{t+\frac{3}{2}}}$$

当 $t\in[\frac{3}{2},+\infty)$ 时，$f(t)$ 单调递减，所以当 $t=\frac{3}{2}$，即 $\{k_1,k_2\}=\{-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\}$ 时，

四边形 $ABCD$ 的面积取得最大值 $\frac{7}{2}\sqrt{3}$. ……………15 分

22．（本题满分 14 分）

解：（Ⅰ）$\lambda=2$ 时，$f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}\ (x\ge 1)$，求导可得

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2(x+1)-2(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\ge 0$$ ……………3 分

所以，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，故 $f(x)$ 的最小值是 $f(1)=0$. …………5 分

（Ⅱ）依题意，$k_n=\frac{\ln(n+1)-\ln n}{n+1-n}=\ln(1+\frac{1}{n})$. ……………6 分

（ⅰ）由（Ⅰ）可知，若取 $\lambda=2$，则当 $x>1$ 时 $f(x)>0$，即 $\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$.

于是 $\ln(1+\frac{1}{n})>\frac{2(1+\frac{1}{n}-1)}{1+\frac{1}{n}+1}=\frac{2}{2n+1}$，即知 $\frac{1}{k_n}<\frac{2n+1}{2}$. …………8 分

所以 $S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i}<\sum_{i=1}^{n}\frac{2i+1}{2}=\frac{n(n+2)}{2}$. ……………9 分

（ⅱ）取 $\lambda=3$，则 $f(x)=\ln x-\dfrac{3(x-1)}{x+2}\ (x\ge 1)$，求导可得

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{3(x+2)-3(x-1)}{(x+2)^2}=\frac{(x-1)(x-4)}{x(x+2)^2}$$

当 $x\in(1,2)$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 单调递减.

所以，$x\in(1,2]$ 时，$f(x)<f(1)=0$，即 $\ln x<\dfrac{3(x-1)}{x+2}$． ……………12 分

注意到，对任意正整数 n，$1+\dfrac{1}{n}\in(1,2]$，于是

$k_n=\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{3(1+\frac{1}{n}-1)}{1+\frac{1}{n}+2}=\dfrac{3}{3n+1}$，即知 $\dfrac{1}{k_n}>\dfrac{3n+1}{3}$． ……………13 分

所以 $S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i}>\sum_{i=1}^{n}\frac{3i+1}{3}=\frac{n(3n+5)}{6}$． ……………14 分